VISUALIZAÇÃO E ENSINO DE ANÁLISE MATEMÁTICA[1]

VISUALIZATION AND THE TEACHING OF MATHEMATICAL ANALYSIS

MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO[2]
THORSTEN SCHEINER[3]

Resumo:
O ensino de análise matemática tem sido investigado há décadas e debatido sob diferentes perspectivas teóricas. A atualidade e continuidade do debate se justifica, dentre outros, pelos inúmeros relatos dos obstáculos enfrentados por professores e alunos em seu ensino e aprendizagem, pela necessidade de sua delimitação nos diferentes currículos, pela conveniência, ou não, ou até mesmo pertinência, de seu estudo nos diferentes cursos. Aqui, temos a intenção de propor elementos para a discussão de seu ensino e aprendizagem, referentes a usos de representações visuais em argumentações matemáticas e trazendo a noção de abstração estrutural.
Palavras-chave: *Visualização; abstração estrutural; argumentação em matemática; educação matemática no ensino superior.*

Abstract: *The teaching of mathematical analysis has been investigated and debated for decades from different theoretical perspectives. The current and continuing debate is justified by the numerous reports of the obstacles in the teaching and learning of the subject, in its delimitation in the different curricula, in the convenience or even relevance of its study in the different courses, amongst others. Here, we intend to propose elements for the discussion on the use of visual representations in formal mathematical arguments, for the teaching and learning of mathematical analysis, presenting the notion of structural abstraction.*
Key-words: *Visualization; structural abstraction; mathematical argumentation; mathematics education in the tertiary level.*

Introdução

Em sua pesquisa de doutorado Pinto (1998) investiga o processo de transição de alunos de bacharelado em matemática ao iniciar o estudo da matemática formal. Esta envolve o uso de definições, a partir das quais outras propriedades do conceito definido são construídas por dedução formal. Em particular, foram analisadas as estratégias desenvolvidas pelos alunos para entender proposições quantificadas, como as que expressam a definição de limite de sequencia de números reais.

Àquela época, a pesquisa de Dubinsky e seus colegas (1986,1988, 1991) era a referência teórica importante na área de educação matemática no ensino superior para

[1] Artigo reelabora o artigo de discussão apresentado no III Forum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil – PUC/SP. Grupo de Discussões 11.
[2] Doutora em Educação Matemática, University of Warwick, Inglaterra. Professora no PEMAT-Instituto de Matemática, UFRJ. E-mail:marcia@im.ufrj.br
[3] Pesquisador e professor em Educação Matemática . University of Hamburg. Alemanha. E-mail: thorsten.scheiner@uni-hamburg.de

investigar, em especial, a aprendizagem de proposições quantificadas e o que os autores denominam por cálculo de predicados. Para aqueles pesquisadores, a aprendizagem de definições que são expressas como proposições quantificadas, bem como de conceitos matemáticos em geral, ocorre por meio da *abstração reflexiva*. Esta forma de abstração, concebida por Piaget, fora reorganizado com a intenção de propor uma teoria geral de aquisição do conhecimento matemático. Para o caso do cálculo de predicados [4], envolvendo quantificadores, o argumento para explicar a aprendizagem é que um predicado com uma ou mais variáveis, entendido como uma função, é concebido como um processo mental, e precisa ser *encapsulado* em uma proposição (um objeto mental), tendo como ponto de partida o processo de quantificação.

Uma argumentação similar sobre o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos é encontrada também em Sfard (1991). Ela destaca que a concepção de uma definição matemática como um objeto abstrato, que ela denomina concepção *estrutural*, (e que em seu entendimento foi predominante durante o período da matemática moderna), refere-se a apenas um aspecto possível para o tratamento das noções matemáticas. Em seu entender, uma noção matemática inclui também um aspecto que diz respeito a processos, algoritmos e ações, reflete o que ela denomina concepção *operacional*. Sfard (1991) considera que esta última *é, para a maioria das pessoas, o primeiro passo na aquisição de uma noção matemática nova*.(SFARD, 1991, p.1).

Ambos Dubinsky (1986, 1988, 1991) e Sfard (1991), sustentam-se teoricamente em Piaget. Enquanto Dubinsky retoma o processo cognitivo denominado *abstração reflexiva*, reorganizando o conceito, Sfard (1991) reinterpreta um de seus aspectos como *reificação*.

No entanto, Piaget (por exemplo, 1977/2001) já distinguia duas formas de abstração: a abstração a partir da ação (abstração de ações) e abstração a partir de objetos (abstração de objetos). Na concepção de Piaget, a primeira forma de abstração tem como fonte o indivíduo e é interna. Consiste de coordenações gerais de ações, extraindo propriedades de ações que os sujeitos introduzem nos objeto. Em referencia `a abstração a partir de objetos, ele explica[5]:

[4] Um predicado é uma sentença matemática com número finito de variáveis que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos. Tais variáveis podem também ser quantificadas.

[5] Tradução de: Here is the essential difference. In the case of the external experience, the quality abstracted from the object is already recognized in the object, in the same form, before being abstracted.

> Aqui está a diferença essencial. No caso da experiência externa, a qualidade abstraída do objeto já é reconhecida no objeto, na mesma forma, antes de ser abstraída. (PIAGET, 1973, 2nd edition, p. 75)

Nos últimos anos, pesquisadores vêm retomando o estudo de formas de abstração por considerarem exagerada, parcial ou restrita a aspectos essencialmente algébricos dos objetos matemáticos, a ênfase no foco em “abstração de ações”. De fato, esta última não nos parecem representar nem explicar inteiramente os fenômenos envolvidos no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos (ver, por exemplo, PINTO, 1988; PINTO e TALL, 2002; SCHEINER e PINTO, 2014). Além disto, de um modo geral, concepções operacionais, quer dizer, elaboradas a partir de ações, processos, algoritmos, têm sido propostas como a primeira abordagem teórica para a aprendizagem de conceitos, não só como foco de pesquisa, mas também na proposição de atividades e elaboração de outros materiais para serem utilizados na sala de aula de matemática. Desta forma, entendemos que as possibilidades de construções a partir de objetos, envolvendo outros aspectos alternativos aos numérico-algébricos, têm sido negligenciadas. Participando deste debate, diSessa e Sherin (1998) argumentam que embora o reconhecimento de qualidades dos objetos sejam ponto de partida para a criação de categorias, pela abstração empírica, esta última não é suficiente para prosseguirmos na construção da matemática. Indo além da proposição de Piaget sobre abstração empírica, Mitchelmore and White (2007) retomam a concepção de abstração em Skemp (1986), que a descreve em termos da estrutura subjacente aos conceitos, ao invés de suas categorização de características superficiais. Um foco sobre estrutura subjacente aos objetos matemáticos é central `a investigação sobre formas de abstração, na vertente ‘abstração de objetos’. Enquanto Mitchelmore and White (2007) discutem a questão considerando objetos físicos, Scheiner (2013), e posteriormente Scheiner e Pinto (2014, 2015), descreve um quadro teórico para levar em conta objetos mentais, reinterpretando a noção de abstração estrutural proposta em Tall (2013). Em seu livro *How humans learn to think mathematically*, Tall define a noção de “abstração platônica” como uma forma de abstração distinta das três já discutidas por Piaget, e que “generaliza a abstração empírica das propriedades de objetos físicos, para imaginar objetos mentais que só podem existir na mente” (p.9). Esta forma de abstração, e a abstração empírica concebida por Piaget, constituem o que Tall denomina “abstração estrutural”. As outras duas outras formas de abstração discutidas em Piaget – empírica e reflexiva, irão compor o que Tall nomeia por “abstração operacional”.

Neste artigo discutimos a noção de *abstração estrutural* e os processos nela envolvidos, como proposto por Scheiner (2013) e reelaborado em Scheiner e Pinto (2014). Fazemos uma síntese de trabalhos que publicamos em revistas e congressos internacionais, por acreditarmos ser importante uma divulgação no país. Em nossa pesquisa, a abstração estrutural, como quadro teórico, é simultaneamente instrumento e objeto de investigação, como em Assude, Boero, Herbst, Lerman, Radford (2008). Aqui neste artigo, a re-análise de um estudo de caso (PINTO, 1998; PINTO e TALL, 2002) tem, além da intenção utilizar a noção para analisar a aprendizagem de conceitos matemáticos, o objetivo de evidenciar um uso de representações visuais na argumentação matemática; em especial, ao estudar o conceito formal de limite de sequencia de números reais. Discutimos a exploração de (e com) objetos como estratégia de aprendizagem. A sugestão sobre como a noção de *abstração estrutural* pode influenciar a elaboração de materiais alternativos para as atividades em sala de aula (SCHEINER, 2013; SCHEINER e PINTO, 2014, SCHEINER e PINTO, submetido), usando representações visuais em argumentações matemáticas, é trazida ao final.

Na seção a seguir retomamos brevemente o programa de pesquisa de Dubinsky, que propõe construções teóricas a partir da noção de ‘abstração de ações’, como um contraponto para melhor entender a apresentação da noção de *abstração estrutural*, que assume a ‘abstração de objetos’ como ponto de partida.

A noção de abstração reflexiva e a abordagem operacional para entender proposições quantificadas, como proposta por Dubinsky

Em seu programa de pesquisa, Dubinsky e seus colegas elaboram um quadro teórico referenciando-se em Piaget, declarando o uso do entendimento dos próprios pesquisadores sobre matemática e sua aprendizagem durante a concepção e desenvolvimento da investigação, bem como produzindo dados de observação dos estudantes envolvidos em atividades matemáticas elaboradas e propostas pelos próprios pesquisadores. A questão de pesquisa: como um tópico particular de matemática pode ser aprendido? (DUBINSKY, 1991, p.96), é respondida retomando a noção Piagetiana de *abstração reflexiva*, reorganizando-a. Os pesquisadores argumentam que esta noção pode ser utilizada para descrever a epistemologia de vários conceitos matemáticos, e propõem explicações a partir dessa noção de abstração para dificuldades dos estudantes com diversos conceitos. Afirmam ainda que o conceito de abstração reflexiva pode influenciar uma proposta de ensino que resulta em melhor compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

Para descrever a epistemologia dos conceitos matemáticos, Dubinsky e seus colegas (DUBINSKY, 1986;. DUBINSKY et al, 1988; DUBINSKY, 1991) concebem o que eles denominam por *decomposição genética* do conceito.

Como um exemplo, vamos discutir a definição de convergência de uma sequência (a_n)para um limite *L*, que pode ser apresentada como

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n: \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

ou $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N: \quad |a_n - L| < \varepsilon$

Esta definição é expressa como proposição formal quantificada em três níveis, ou dito de outro modo, como uma quantificação de terceira ordem. Na perspectiva de Dubinsky et al, (1988), o aluno, para entendê-la, constrói a quantificação interna envolvendo um único quantificador em primeiro lugar,

$\forall n: \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$ (ou $\forall n \geq N: \quad |a_n - L| < \varepsilon$)

para depois fazer atuar os sucessivos quantificadores externos, de nível superior, que são $\forall$ e $\exists$.

A discussão em Pinto e Tall (2002) sobre tal entendimento argumenta que no caso de proposições quantificadas, a decomposição genética proposta parece remeter `a estrutura interna da linguagem de programação ISETL[6], muito utilizada por aqueles pesquisadores em suas atividades em sala de aula. Proposições quantificadas podem ser testadas usando o ISETL, pois tal linguagem permite lidar com conjuntos finitos, podendo considerar todos os seus elementos, um de cada vez.

Como exemplo, a proposição quantificada $\forall x \in S: P(x)$ é escrita em ISETL é "for all *x* in $S: P(x)$"; sendo $P(x)$ um predicado, que é verdadeiro ou falso, para cada *x* em um conjunto finito *S*.

Para determinar se a proposição quantificada

for all *x* in $S: P(x)$

[6] A linguagem ISETL é uma linguagem de computação algébrica. O *software* é livre.

é verdadeira, o ISETL executa sucessivamente os elementos x_1, ..., x_n em *S* e testando cada proposição $P(x_r)$. Se alguma das $P(x_r)$ for falsa, o valor “falso” é atribuído todas as proposições testadas, de uma vez só. Por outro lado, se os testes são concluídos e cada $P(x_r)$ é verdadeira, o valor é retornado como “verdadeiro”.

Explorando um outro exemplo, o predicado $\exists x \in S : P(x)$, que é escrito em ISETL como “exists *x* in $S: P(x)$”, tem a afirmação

exists *x* in $S: P(x)$

verificada em ISETL de modo semelhante ao descrito anteriormente: testando cada proposição $P(x_r)$, retornando "verdadeiro” se for encontrado um valor em que a proposição é verdadeira e "falso" se todas as proposições $P(x_r)$ são falsas para todos os valores de *x*.

A aplicação sucessiva do princípio descrito acima possibilita lidar com um predicado $P(x, y)$ em duas variáveis, manipulando-o em dois estágios. Por exemplo, no caso da proposição

$$\forall x \in S \quad \forall y \in T : P(x, y)$$

fixamos primeiro o *x* (referente `a quantificação externa) e consideramos a proposição interna

$$\forall y \in T : P(x, y)$$

A veracidade dessa afirmação poderia ser testada, iterando os valores de *y*. O resultado será uma proposição $Q(x)$ em uma única variável *x*:

$$Q(x) = [\forall y \in T : P(x, y)]$$

que é verdadeira ou falsa, para cada valor de *x*.

Como passo seguinte, para todos os valores de *x* a veracidade da afirmação

$$\forall x \in S : Q(x)$$

será testada. Retomando o que foi representado por $Q(x)$, o último teste proposto corresponde a decidir se

$$\forall x \in S \quad \forall y \in T : P(x, y)$$

é falso ou verdadeiro.

Não há dúvidas de que o método indutivo descrito por Dubinsky de aplicar sucessivamente os quantificadores, do quantificador interno para o externo, reduz gradativamente a complexidade de uma proposição com múltiplos quantificadores. Mesmo que sua lógica seja evidente, não se pode esquecer, no entanto, de que no caso de uma proposição multi-quantificada a complexidade cognitiva do processo de *encapsulação* ainda é enorme. Dubinsky relaciona o entendimento de uma proposição quantificada e a noção cognitiva de *encapsular um processo como um objeto*, por considerá-la fundamental importância para o desenvolvimento cognitivo

> a principal habilidade cognitiva (ou ato de inteligência) que sinto ser necessário aqui é a capacidade de mover para frente e para trás entre um processo interno e seu encapsulamento como um objeto. (DUBINSKY et al., 1988, p.48)[7]

Em sua teorização, cada aplicação de um quantificador transforma um predicado $P(x)$ em uma proposição. Dubinsky refere-se a este predicado $P(x)$ como um processo (na variável x) – uma função proposicional, e a uma proposição quantificada – tal como $\forall x : P(x)$ ou $\exists x : P(x)$ como um *objeto*, estabelecendo assim a relação entre sua decomposição genética e seu conceito de abstração reflexiva.

O método de pesquisa proposto Dubinsky e colegas, declarando o uso do entendimento dos próprios pesquisadores sobre como os conceitos matemáticos são aprendidos e elaborando atividades a serem trabalhadas pelos participantes das pesquisas, nos deixam em dúvida sobre até que ponto estas não condicionam as estratégias, dificuldades e os sucessos dos alunos.

A noção de abstração estrutural como alternativa para entender proposições quantificadas

A noção de *abstração estrutural* apresentada em Scheiner (2013), e rediscutida em Scheiner e Pinto (2014), retoma Davydov (1972/1990) e sua concepção sobre a ascensão do abstrato para o concreto de um ponto de vista dialético, como expresso por Ilyenkov (1982). Referencia-se em pesquisas recentes em psicologia da educação matemática, dialogando com uma re-análise dos dados apresentados em Pinto (1998).

---

[7] Tradução de: *the major cognitive skill (or act of intelligence) that we feel is required here is the ability to move back and forth between an internal process and its encapsulation as an object.*

Incorporamos a noção de *abstração estrutural* em uma arquitetura cognitiva que tem lugar tanto na estrutura dos objetos e quanto na estrutura do conhecimento. Tem portanto uma natureza dual, expressa nos seguintes processos:

(1) complementarizar os aspectos significativos e a estrutura subjacente a objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito matemático particular.

(2) promover a ampliação de estruturas de conhecimento coerentes e complexas, através de uma reestruturação e expansão de sistemas de conhecimento produzidos por meio do primeiro processo (SCHEINER, 2013; SCHEINER & PINTO, 2014).

Do ponto de vista da *estrutura do objeto*, Scheiner (2013) pressupõe que o "significado de um conceito" (FREGE, 1892), socialmente construído, não é diretamente acessível através do conceito em si, mas por meio de objetos que a ele se referem. Está (quase sempre) contido em uma unidade de diversos componentes significativas de uma variedade de objetos específicos que se enquadram em um conceito particular. Para nós, objetos matemáticos são, dentre outros, definições, representações icônicas e dinâmicas, elementos linguísticos, proposições (FONT, GODINO e GALLARDO, 2013), compartilhando a visão de que a objetividade matemática é um construto social. Argumentamos que ao situar o (s) objeto (s) em diferentes contextos específicos, sua estrutura matemática é inserida percebendo-o (s) em relação a si mesmo (s) ou a outros objetos, incluídos no âmbito de um mesmo conceito particular. Em um processo que estamos nomeando de *complementarização*, *abstração estrutural*, então, significa estruturar (mentalmente) tais aspectos subjacentes a objetos específicos.

Vale destacar que dentro da visão empirista, a unidade conceitual baseia-se na identificação de similaridades entre elementos, enquanto no âmbito da abordagem de abstração estrutural é a inter-relação dos diversos elementos que cria unidade: o núcleo de *abstração estrutural* é *complementaridade* estrutural ao invés de uma categorização referenciada em *similaridades.* Entendemos que por meio do processo de *complementarizacão*, produzimos um *modelo*, que incorpora uma estrutura teórica de um objeto em construção, a partir de seus componentes destacados como significativos até então. Tais modelos são, nesse sentido, intermediários no processo de abstração entre o “abstrato” e o “concreto”, apoiando a *ascensão do abstrato para o concreto*, como descrito em Davydov (por exemplo, 1972/1990)[8].

[8] A estratégia descrita por Davydov de ascender do abstrato para o concreto remete à transição do geral para o particular, no sentido de que os alunos inicialmente procuram entender seu 'núcleo' primária e, progressivamente, deduzem múltiplas particularidades do objeto usando esse 'núcleo' como seu esteio.

Em síntese, a característica fundamental na perspectiva da *abstração estrutural* está na ideia de que vários objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito particular complementam-se mutuamente (processo de complementarização); de modo que uma abstração individual, de cada um deles, é superada. Este processo que tem lugar na abstração da estrutura do objeto representa um movimento no sentido da *complementaridad*e dos diversos aspectos que criam uma unidade conceptual entre suas representações distintas. Este entendimento é coerente com a perspectiva dialética descrita por Ilyenkov (1982) e difere de abordagens empiricistas, como em Skemp (1986).

Em referência à *estrutura do conhecimento*, a *abstração estrutural* promove uma reestruturação de aspectos do conhecimento construídos por meio do processo de complementarização descrito acima. Aí, a função cognitiva da *abstração estrutural* é a de promover ou produzir estruturas de conhecimento mais complexas. As representações ou os *modelos de* objetos produzidos (por exemplo, uma representação visual) são utilizados como *modelos para* produzir novos conhecimentos, sendo incorporados `a argumentação matemática.

A alternância entre produzir uma representação do conceito e usá-la como uma representação genérica para organizar e reorganizar novos contextos pode ser descrita em termos de mudanças entre um *modelo de* (um objeto) a um *modelo para* (novos conhecimentos)[9]. Esta distinção remete ao trabalho de Freudenthal na década de 70 que propõe:

> *Modelos de* algo são pós-imagens de um pedaço de uma realidade dada; *modelos para algo* são pré-imagens para um pedaço de realidade a ser criada (FREUDENTHAL, 1975, p. 6, grifo do autor).

O movimento de transformação de uma *pós-imagem* em uma *pré-imagem* indica um grau de consciência sobre os componentes significativos na primeira – desenvolvida em resultado do processo de *complementarização,* e atuando sobre a complexidade das estruturas de conhecimento.

A filosofia orientadora desta perspectiva pressupõe que os alunos adquirem conceitos matemáticos a partir de imagem conceitual (Tall&Vinner,1981) relacionada já existente, justapondo progressivamente tais imagens existentes e/ou inserindo um novo discurso que as reestrutura.

[9] Na linguagem que estávamos utilizando, falamos de mudanças entre *representação de* a uma *representação para*.

Tal perspectiva é coerente com a análise em Pinto (1998)[10], quando discute o caso de um grupo de alunos de bacharelado em matemática que constroem uma *representação de* um conceito (representações visuais, nos casos estudados) e, ao mesmo tempo, utilizam esta representação como *representação para* produzir novos conhecimentos, tais como a recuperação verbal de uma definição formal do conceito de limite de sequencia.

Identificado em Pinto (1998) como grupo de alunos que *atribuem significado*, eles reconhecem e usam a definição formal de um conceito matemático como uma dentre outras representações relacionadas; sendo essas últimas construídas ou provenientes de experiências anteriores vividas na escola e/ou fora da escola - um sentido pleno para a proposta de considerarmos a definição conceitual incluída na célula da imagem conceitual[11]. Dito de outro modo, a definição formal do conceito, para este grupo de alunos, não tem necessariamente primazia sobre as outras representações ao elaborar uma argumentação matemática. Por outro lado a definição formal evidencia-se sim por seu poder complementar, sendo essencial para reestruturar as representações do conhecimento existentes – a estrutura do conhecimento, ampliando-o, transformando-o, reconstruindo-o.

Em Pinto (1998), os estudantes que se limitaram a justapor fragmentos de conhecimento, por vezes conflituosos e sem buscar articulações, produziram uma estrutura de conhecimento, subjacente às diferentes faces de um conceito, inconsistente, compartimentalizada, e o processo de abstração estrutural não se realizou ou não se realizou por completo. Já outros, ao reconhecerem as noções conflituosas que se evidenciavam em contato com o conhecimento formal, deram início a uma reconstrução contínua das estruturas de conhecimento, *complementarizando* e ampliando-as. Em um estudo de caso sobre alunos deste último grupo, Scheiner e Pinto (2014, 2015) retomam as entrevistas com o aluno de bacharelado em matemática Chris (PINTO, 1998), reanalisando-as sob a perspectiva do quadro teórico proposto em Scheiner (2013). Como já mencionado, a intenção em retomar o material empírico em Pinto (1998) é evidenciar

[10] Pinto (1998) acompanha onze estudantes de matemática (bacharelado) durante vinte semanas do seu primeiro ano cursando análise real, observando a sala de aula. Entrevistas são realizadas em encontros individuais. Nestes, os temas trabalhados em sala de aula na semana anterior são discutidos, com questões preparadas ao longo do curso. Da análise indutiva do material produzido em entrevistas emerge uma estrutura, organizada em três eixos – definições, argumentos, imagem, permitindo caracterizar duas estratégias (atribuindo significado e extraindo significado) utilizadas pelos participantes para se engajarem na nova experiência.

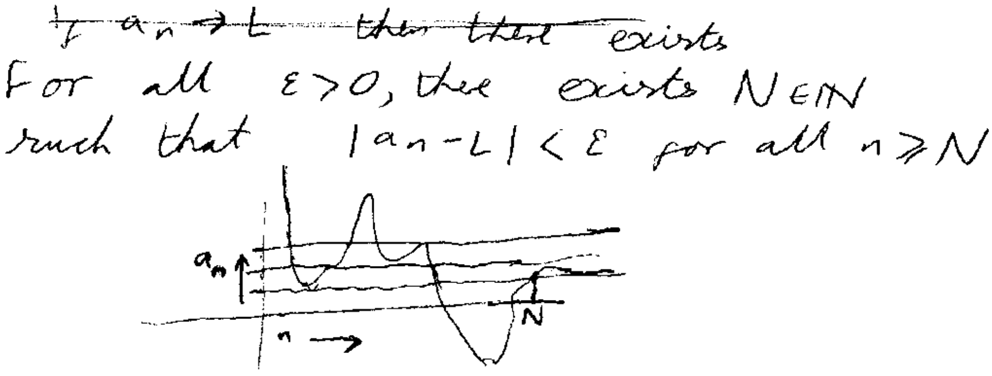
[11] A comunidade brasileira de educação matemática tem traduzido os termos concept image e concept definition, cunhados por David Tall e Shlomo Vinner, de modos distintos, sem perda no sentido dos mesmos.

o potencial analítico do novo quadro teórico, e ao mesmo tempo refinar as noções propostas. Neste artigo, nosso objetivo é também chamar atenção para aspectos relacionados ao uso de representações visuais pelo estudante Chris, conjecturando alternativas para o uso de visualização no ensino de matemática.

Sobre a matemática formal e o uso de representações visuais

Chris escreve a definição formal de limite de uma sequencia em sua primeira entrevista, afirmando que não memorizou a definição, que procurou entendê-la consultando diversos livros.

Figura 1: Uma definição de limite de sequencia e uma representação do conceito de sequencia convergente



Fonte: Pinto (1998).

Diz que recupera seu enunciado e seu significado a partir de uma representação visual, que passa então a desenhar (Figura 1). Da análise da explicação de Chis enquanto ele desenhava, argumentamos que, antes de tudo, ele evoca uma *representação de* um objeto - uma sequencia convergente; no caso, uma representação visual, e reconstrói a definição, explorando a representação e utilizando a língua materna para recuperar o enunciado da definição formal.

Eu penso nela [a sequencia convergente?] graficamente ... eu penso nela como se você tivesse um gráfico ali, e eu penso que tem ... tem um limite lá ... então ...uma vez como aquele lá ... e você pode desenhar a partir daqui e então todos os ... pontos depois do N lá ... eles estão dentro destas fronteiras. ... ... se isto err quando eu pensei nisto [definição formal?], foi difícil de entender, então eu pensei nisso como nesta figura ... tipo aquele é o n indo além e aquele é o a n ...

(Chris, primeira entrevista).

Vale observar que ao mesmo tempo que Chris constrói em sua figura uma representação visual do conceito de sequencia convergente, faz uso desta representação para construir um novo conhecimento – a enunciação da definição formal do conceito de limite. No caso dos estudantes no grupo dos que *atribuem significado*, as *representações de* objetos são constantemente utilizadas de modo semelhante, para construir novos conhecimentos. Em outras palavras, *representações de* (objetos matemáticos) são constantemente utilizadas como *representações para* construir (conhecimentos novos) , para dar sentido à experiência matemática, sendo incorporadas à argumentação matemática.

Pelo processo de complementarização, torna-se possível promover a transição de "várias" representações, que expressam objetos específicos colocados em diferentes contextos, para "uma" *representação para* construir e reconstruir formalmente o conceito.

No entanto, o uso de uma *representação para* construir novos conhecimentos não significa consistência a priori de uma imagem do conceito e nem uma coerência da representação, em si.

No caso de Chris, por exemplo, embora bastante genérica, a sua representação visual de sequência convergente ainda reflete interpretações comuns, tais como a de que talvez o limite está inacessível; sugerindo que a estrutura do conceito ainda não está completa, neste momento.

Durante a primeira entrevista, a co-existência de visualizações dinâmicas do conceito de limite em sua imagem conceitual é confirmada quando ele expressa suas dúvidas ao responder se a sequência 1, 1, 1, ... tem um limite:

Na verdade eu não sei. Ela definitivamente vai ... vai ser sempre um ... por isso não estou realmente certo ... umm ... é estranho, porque quando alguma coisa tende a um limite, você pensa nela como nunca chegando lá ... por isso, se é ... 1 ... então, pela definição, [ela] tem um limite, mas ... a gente realmente não pensa nele [1] como um limite, mas apenas como um valor constante.... eu realmente não sei.

(Chris, primeira entrevista)

Neste momento, Chris evoca uma visão dinâmica do conceito de limite e uma compreensão inconsistente (limite como inacessível) coexistindo com a definição formal que ele já consegue enunciar, quase certamente, com significado. Sua seriedade ao expressar suas dúvidas sugere que, mesmo imerso na cultura de sala de aula na universidade, ele não vai eliminar suas imagens anteriores quando confrontado com a definição formal. Por outro lado, ele reconhece que o sentido do conceito não está completo em sua estrutura global e que no momento este é constituído por aspectos conflitantes de conhecimento. É neste sentido que entendemos que, para Chris, não há *primazia* da definição formal em relação a outras representações, no sentido da exclusão imediata de imagens anteriores ao tomar conhecimento da definição formal. Por outro lado, há que se destacar o *poder complementar* da nova representação (formal) sendo integrada progressivamente ao longo de um *novo discurso* (formal), evidenciando e resolvendo os conflitos entre esta e as imagens anteriores. Uma representação da estrutura do conceito reconstruído é apresentado na última entrevista, quando ele expressa espontaneamente sua definição do conceito, sem formalizá-la:

A sequence has a limit ~~if~~ and only if as the sequence progresses, eventually, all values of the sequence gather around a certain value.

(Chris, sétima entrevista)

Scheiner e Pinto (2014, 2015) interpretam tais modos de reconstruir visualizações dinâmicas em versões (aparentemente) estruturais, complementarizando e unificando as diversas representações, inclusive a definição formal, como *movimentos em diferentes níveis de complexidade*, que são recuperados ao examinar as descrições de Chris sobre suas tentativas de entender a definição formal. Por exemplo, durante sua segunda entrevista, Chris comenta:

Eu não percebi que você tinha que ... apenas encontrar um N ... tipo tal que ... módulo de a_n *é menor que epsilon. Não entendi ... não peguei essa última parte. ... ... O fato de que, na verdade, você consegue um. (Risos) Eu não entendi muito bem isso. ... ... Eu refleti de novo e, então, uma vez que eu percebi ... que ... você tem que apenas encontrar ... um valor que deve depender de epsilon ... então ... [eu pude] ver o que a definição quis dizer.*
(Chris, segundo entrevista)

Chris parece estar se referindo à exploração da parte interna da declaração quantificada para entendê-la primeiro, como sugerido em Dubinsky et al. (1988):

apenas encontrar um N ... tipo tal que ... módulo de a n é menor que epsilon. Não entendi ... não peguei essa última parte. ...

No entanto, o entendimento não nos parece resultar de uma sequência de processos que são encapsulados como objetos – os predicados e proposições quantificadas, dos quantificadores internos aos externos. Chris explora a declaração interna para verificar uma propriedade satisfeita por um objeto - uma sequência convergente, da qual ele já tem uma *representação* visual, usando o modelo que havia construído. Suas dúvidas sobre o *fato de que você realmente encontra um* valor de N, parecem estar relacionadas ao refinamento de sua representação de convergência. Enquanto ele busca complementaridade, examinando *o que é permitido acontecer*, considera sequências crescentes, decrescentes, em movimentos diversos, para cima e para baixo.

Em sua última entrevista, Chris traz uma reflexão sobre suas tentativas de entender a definição:

Umm ... a coisa é ... quando você pensa sobre por que ... por que você está realmente fazendo isso ... então ... é quando tudo se torna claro. Você descobre por que você está escolhendo o N de modo que ficam todos lá dentro, então ... ela [a sequencia] tende gradualmente para esse limite. ... Mas ... é ... quando você está escolhendo um valor de N ... tal que todos os pontos depois [do valor de N] podem fazer o que quiserem lá dentro, é que você realmente ... acha que você pode, .. fazer epsilon pequeno .

(Chris, sétima entrevista)

A reflexão acima sugere que Chris concluiu que *todos os pontos depois [do valor de N] podem fazer o que quiserem lá dentro* da região no plano limitado por duas retas que representam $y = L + \varepsilon$ e $Y = L - \varepsilon$. Esta é uma propriedade que ele passa a atribuir a sequencias convergentes.

Entendemos que Chris chega a esta conclusão utilizando e/ou reconstruindo seu *modelo*. Na verdade, ele o utilizou em experimentos mentais explorando sua representação visual de sequencia convergente, estipulando um valor ou posição *N* e encontrando um ε relacionado, em uma inversão de lógica do que é declarado na definição formal:

.. Você decide quão longe ... e você pode trabalhar um epsilon a partir disto ... ou se você escolher um epsilon você pode trabalhar o quão longe.

(Chris, primeira entrevista)

O fato é que deslocar (como em um experimento mental) o *N* para a direita e determinar ε, em sua representação visual, provoca uma sensação dinâmica que é a da sequência tendendo a um limite. Bem como uma percepção da simultânea da genericidade e universalidade de ε . Como Chris comenta na última entrevista:

Eu acho que foi isso ... Eu não estava pensando ... em geral sobre isso ... Eu não estava pensando que, geralmente, ele funciona para qualquer epsilon ... Eu só estava pensando ... em um caso.
[Sim, não basta fixar um.]
Sim.

Durante o seu experimento mental, explorando mentalmente sua representação como se fosse um objeto físico, ele percebe a ação do quantificador externo, ou seja, seu significado foi construído em contexto, usando a *representação de* (ou o modelo de) sequencia convergente como *representação para* (ou modelo para) construção de novo conhecimento – a definição formal de limite de sequencia.

Considerações finais e desdobramentos para o ensino de matemática

Em seu contato com o conceito formal de limite de sequencia, Chris elabora uma *representação de* uma sequência convergente que depois é usada como *representação para* entender a própria definição formal; ou em outras palavras, como uma representação alternativa para organizar novas situações e contextos, e para argumentar matematicamente.

Nossa análise confirma este fato, de que Chris usa representações como instrumento para sustentar a produção de argumentações formais, e não como objetos que tornam autoevidente propriedades e fatos que necessitam dedução no contexto da matemática formal. Estes resultados sobre visualização e aprendizagem da matemática são importantes, contrapondo-se também a usos da visualização como meramente ilustrativa dos conceitos estudados, compartimentalizada do conhecimento que está sendo produzidos.

Scheiner e Pinto (2015) sugerem que Chris pode ter utilizado uma série de exemplos de sequencias – monotônicas crescentes, decrescentes, alternadas, para estruturar sua representação genérica. Pelo processo descrito como *complementarização*, cada objeto (representação, exemplo de sequencia convergente) inclui componentes significativas, específicas do conceito de limite. Refletem, em síntese, o *que pode acontecer*, sob o nome do conceito. Das *inter-relações* entre estes objetos aparentemente distintos resulta uma representação que não estaria mais relacionada a uma situação específica, mas refletiria um ponto de vista mais geral; sendo genérica, neste sentido. Tal representação torna-se uma entidade com um estatuto próprio e passa a ser utilizada como instrumento para estruturação do conhecimento.

No caso do grupo de alunos que 'atribuem' significado, representações visuais, como no caso de Chris, estão frequentemente imersas na argumentação matemática. Incorporando, ou não, o discurso formal. São instrumentos para resolver problemas, e objetos para experimentações mentais, como fica explícito nas reflexões de Chris sobre de que modos ele entende a definição formal de limite de sequencia.

Tanto a concepção quanto o uso feito por Chris de sua representação, visual, no movimento de reestruturação de 'pedaços de conhecimento' em estruturas de conhecimento coerentes e mais complexas, revelam aspectos sobre visualização que são de interesse para o ensino da matemática. Representações visuais são um recurso alternativo a ser experimentado na matemática formal, por exemplo, no estudo do conceito de sequencias, para apoiar o estudo de definições, resolução de problemas, formalização de argumentos.

No caso do ensino e aprendizagem de sequencias convergentes, a elaboração de uma representação semelhante `a de Chris pode ser trabalhada em sala de aula, a partir de uma seleção de exemplos adequados que evitem uma restrição da imagem conceitual dos alunos, que por vezes identificam sequencias convergentes com sequencias monótonas. Veja que o recurso visual elaborado por Chris foi suficientemente complexo para gerar componentes do conceito de limite de sequencia em diversos contextos. O uso de tal representação para a construção de argumentos formais pode ser experimentado (por exemplo, como faz Chris), abrindo possibilidades para a pesquisa em visualização e ensino da análise matemática

6. Referências

ASSUDE, T.; BOERO, P.; HERBST, P.; LERMAN, S.; RADFORD, L. (2008). The notions and the roles of theory in mathematics education. In *11th International Congress on Mathematical Education*. (ICME, pp. 6-13). Monterrey, Mexico: ICMI.

DAVYDOV, V. V. (1972/1999) *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet studies in mathematics education, v. 2. Reston, VA: NCTM.

diSESSA, A. A., & SHERIN, B. L. (1998). What changes in conceptual change? *International Journal of Science Education, 20*(10), 1155-1191.

DUBINSKY, E. (1986) A theoretical perspective for research in learning mathematics concepts: genetic decomposition and groups. (Informal Summary of Presentation).

DUBINSKY, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht, pp. 95–123.

DUBINSKY, ELTERMAN & GONG. (1988) The Student's Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematics* 8, 2. pp. 44–51. FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada. 1988.

FREGE, G. Über Begriff und Gegenstand (On concept and object). *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, v. 16, pp. 192-205. 1982.

FREUDENTHAL, H. Voorwoord. (1975) In R. de Jong, A. Treffers, & E. Wijdeveld (Eds.), *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool, Leerplanpublikatie 2*. Utrecht, The Netherlands: IOWO.

FONT V., GODINO, J. D., & GALLARDO, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82(1),* 97-124.

ILYENKOV, E. V. (1982) *The dialectics of the abstract and the concrete in Marx's Capital*. Moscow: Progress.

MITCHELMORE, M. C., & WHITE, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 1-9.

PIAGET, J. (1972) *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans.), London, Routledge & Kegan Paul.

PIAGET, J. [and collaborators] (1977/2001). *Studies in reflecting abstraction* (Recherches sur l' abstraction réfléchissante) (translated by R. Campbell). Philadelphia: Psychology Press.

PINTO, M. M. F. (1998/2011) *Students' Understanding of Real Analysis*. PhD Thesis, Warwick University. Ann Arbor, Michigan: ProQuest-CSA, LLC.

PINTO, M., M. F. & TALL, D. O., (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. For the Learning of Mathematics.

SCHEINER, T. (2013) Mathematical Concept Acquisition: Reflective, Structural, and Reflectural Learners. *Paper presented at the Working Group 'Factors that Foster or Hinder Mathematical Thinking' of the 37th Conference of the IGPME*. Kiel, Germany: PME.

SCHEINER,T., & PINTO, M. M. F. (2013) Cognitive processes underlying mathematical concept construction: The missing process of structural abstraction. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, v. 5, pp. 105-112. Vancouver, Canada: PME. 2014.

SCHEINER,T., & PINTO, M. M. F. (2015) The evolving framework of structural abstraction: a tool for and an object of research in knowing and learning mathematics. Artigo submetido.

SFARD, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, n. 22, pp. 1-36.

SKEMP, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*, (2nd edition, 1986). London: Penguin Books Ltd.

TALL, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically. Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

TALL, D. O., & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151-169.

TALL, D. O. (1991) (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Dordrecht.