ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

Sobre Processos de Aprendizagem da Matemática e suas Funções Epistemológica, Conceitual e Cognitiva

On Mathematical Learning Processes and their Epistemological, Conceptual, and Cognitive Functions

Márcia M. F. **Pinto**[*]

ORCID iD 0000-0001-5308-0487

Thorsten **Scheiner**[**]

ORCID iD 0000-0002-1118-5958

Resumo

A pesquisa atual sobre aprendizagem da Matemática reconhece que os indivíduos atribuem significado a objetos de seu pensamento. No entanto, alguns processos dinâmicos e interativos envolvidos na atribuição de significado não estão suficientemente especificados. Aqui, o foco é direcionado a três desses processos: contextualizar, complementarizar e complexificar. Os objetivos do artigo são estender as perspectivas existentes sobre tais processos e destacar aspectos epistemológico, conceitual e cognitivo que são significativos para a aprendizagem da Matemática. Para tal, uma agenda de pesquisa é elaborada colocando em diálogo diferentes perspectivas teóricas e posições. Argumentamos que os três processos – contextualizar, complementarizar e complexificar –, juntos, constituem um modelo interpretativo para a aprendizagem da Matemática de uma perspectiva da atribuição de significados.

Palavras-chave: Contextualizar. Complementar. Complexificar. Aprendizagem Matemática. Gottlob Frege.

Abstract

Recent research on Mathematics learning recognises that individuals ascribe meaning to objects of their thinking. However, some dynamic and interactive processes involved in ascribing meaning are not yet sufficiently specified. Here, the focus is directed at three such processes: contextualising, complementizing, and complexifying. The aims of this paper are to extend existing perspectives on these three processes and to highlight epistemological, conceptual, and cognitive aspects that are significant for mathematics learning. To this end, a research agenda is pursued that brings into dialogue different theoretical perspectives and positions. We argue that the three processes – contextualizing, complementizing, and complexifying – together constitute an interpretative model for learning mathematics from a perspective of ascribing meaning.

Keywords: Contextualising. Complementizing. Complexifying. Mathematics learning. Gottlob Frege.

[*] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Warwick (Inglaterra). Professora Associada na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Cidade Universitária da UFRJ, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: marciafusaro@gmail.com.

[**] Doutor em Educação pela Universidade de Hamburgo (Alemanha) e Universidade Macquarie (Austrália). Pesquisador do Instituto de Ciências da Aprendizagem e Formação de Professores (Institute for Learning Sciences & Teacher Education), Universidade Católica Australiana (Australian Catholic University), Brisbane, Austrália. E-mail: thorsten.scheiner@acu.edu.au.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

1 Introdução

Avanços teóricos nas ciências em geral – e na Educação Matemática em particular – são importantes para impulsionar o desenvolvimento da pesquisa e da prática no ensino de Matemática. O entendimento de o que tais avanços possibilitam promover é essencial para enfrentar desafios e responder questões que vêm sendo colocadas e são consideradas fundamentais. Em especial, uma compreensão teórica mais aprofundada sobre conhecer e aprender Matemática constitui um desafio pela complexidade dos processos envolvidos e também porque tais processos são estudados de uma diversidade de pontos de vista, tanto social, quanto culturalmente situados (SIERPINSKA; KILPATRICK, 1998; LERMAN, 2001; RADFORD, 2013), apoiados em filosofias e em paradigmas diferentes (COBB, 2007).

O debate sobre o desenvolvimento do conhecimento e da aprendizagem da Matemática, bem como sobre processos de produção de significado em Matemática, já tem uma longa história e constitui uma área importante da Educação Matemática (ver CAMPBELL, 2005; KILPATRICK; HOYLES; SKOVSMOSE; VALERO, 2005; PIAGET, 1977/2001; RADFORD; SCHUBRING; SEEGER, 2011; SCHOENFELD, 1992; SCHUBRING, 2011; SFARD, 2008; TALL, 2013; VYGOTSKY, 1997).

Lins (1999, p. 86), por exemplo, argumenta que "o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados". Lins (1999) adota um ponto de vista epistemológico relacionando conhecimento (subjetivo) e justificativas individuais dos enunciados correspondentes. Como exemplo, bastante explorado, a proposição 2 + 2 = 4, conhecida por uma criança e por um matemático, deve ser considerada como conhecimentos diferentes em cada caso, porque as justificativas para sua validade são diferentes. Skovsmose (2018), por outro lado, inclui aspectos sociopolíticos das experiências de significado dos alunos em Matemática em sua interpretação de significado no ensino de Matemática. Segundo Skovsmose (2018), existe um acordo entre os educadores em organizar o ensino de Matemática de modo significativo para os alunos, embora por vezes as diferenças entre tais modos sejam irreconciliáveis, dada a diversidade de interpretações para a noção de significado.

Reconhecemos que abordagens tradicionais na pesquisa sobre aprendizagem da Matemática, em especial a da psicologia, reforçam modos até mesmo aparentemente opostos ou irreconciliáveis de pensar sobre a aprendizagem matemática e a produção de significados. Por isso, ao mesmo tempo que os múltiplos olhares sobre a aprendizagem matemática e a produção de significados podem ser entendidos como uma potencialidade do campo, tal

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

diversidade pode resultar em oposições de escolas de pensamento, obscurecendo ou impossibilitando o diálogo entre representantes das diferentes tradições.

Aqui, a intenção é a de colocar em diálogo abordagens e perspectivas teóricas distintas, por vezes retomando tentativas anteriores, para aprofundar o entendimento sobre a aprendizagem da Matemática (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2014; diSESSA; LEVIN; BROWN, 2016; SCHEINER, 2019). Visamos reconhecer a complexidade e a natureza multifacetada do fenômeno que está sendo considerado e promover um entendimento maior sobre questões que nos interessam pesquisar. Em particular, referenciamo-nos em Scheiner (2020), que propõe diálogos entre perspectivas teóricas de modo que eventuais conflitos, tensões e paradoxos entre elas possam promover o desenvolvimento e a construção de novas teorias. Por vezes, diálogos entre perspectivas teóricas revelam complementaridade, dialética ou até mesmo independência entre posições que a princípio eram consideradas incomensuráveis (SCHEINER, 2020).

Este artigo descreve avanços teóricos recentes em nossa pesquisa no contexto da aprendizagem de Matemática, dedicada a entender melhor a complexidade dos processos envolvidos quando os indivíduos atribuem significado aos objetos de seu pensamento (PINTO; SCHEINER, 2015, 2016; SCHEINER; PINTO, 2018, 2019). Tais processos, dinâmicos e interativos, podem ser estudados em maior detalhe e são pouco explorados na literatura, dificultando uma compreensão mais ampla da complexidade envolvida na aprendizagem da Matemática. Dentre as perspectivas e focos possíveis, a abordagem da psicologia foi adotada para investigar aspectos envolvidos na aprendizagem da Matemática da perspectiva de atribuir significados.

O ponto de partida da pesquisa, em Scheiner (2016), retoma duas formas de abstração aparentemente opostas (ou seja, abstração de ações e abstração de objetos; PIAGET, 2001) e duas estratégias identificadas na produção de significado na aprendizagem da Matemática formal (isto é, extrair significado e atribuir significado; PINTO, 1998, 2018), colocando-as em diálogo. Esse diálogo contribuiu para reconsiderar a noção de abstração como atribuir significado a objetos do pensamento pelo indivíduo, em vez de como um modo de reconhecer um significado ainda não apreendido pelo indivíduo, inerente ao conceito e pré existente às interações dos indivíduos com objetos matemáticos a ele relacionados. (para uma discussão de diferentes imagens de abstração, ver SCHEINER; PINTO, 2016).

Nessa reinterpretação, o significado é entendido não como uma qualidade do objeto a ser extraída, mas como algo que é atribuído aos objetos do pensamento por um indivíduo. A natureza simbólico-algébrica-formal do conhecimento investigado em Pinto (1998) e o uso de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

recursos gráficos e visuais por um grupo de participantes em sua pesquisa conduz à discussão teórica em Scheiner (2016) sobre a adoção de uma perspectiva semiótica para a reinterpretar o material empírico, aprofundando sua análise. Na reinterpretação dos dados empíricos, Scheiner (2016) reconhece três processos como centrais à estratégia de atribuição de significado: contextualizar, complementar e complexificar. Scheiner e Pinto (2019) buscam possibilidades dialógicas para mover a discussão sobre os três processos de simples comparações a uma busca por novas perspectivas sobre a complexidade da aprendizagem da Matemática.

Nossa intenção é organizar – contrastando, combinando e coordenando explicações por vezes já existentes, uma explicação para um conjunto específico de fenômenos[1] relacionados à atribuição de significados na aprendizagem da Matemática. Desenvolvemos uma nova perspectiva para análise que se mantém em transformação. Essas são características de teorias que têm sido denominadas teorias locais; ou, como alguns pesquisadores preferem, abordagens teóricas, ao invés de teorias. Em nosso caso, são teorias locais do conhecimento e de aprendizagem na Educação Matemática. Tais teorias locais "são construções em estado de transformação" (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010, p. 488, traduzido pelos autores) que moldam e são moldadas por práticas de pesquisa.

Neste artigo, o objetivo é aprofundar a discussão sobre os três processos – contextualizar, complementar e complexificar – como objeto de pesquisa, sublinhando suas funções epistemológicas, conceituais e cognitivas ao mesmo tempo que os três processos, juntos, são colocados em diálogo como instrumento para a pesquisa sobre a aprendizagem da Matemática quando um indivíduo atribui significado aos objetos do seu pensamento. Desse modo, o referencial é discutido em sua dupla função de objeto de pesquisa e instrumento para pesquisa, uma distinção já feita por Assude, Boero, Herbst, Lerman e Radford (2008).

2 Orientações teóricas e assertivas norteadoras

As perspectivas teóricas que adotamos são elaboradas a partir de diversos pontos de vista sobre conhecimento e aprendizagem da Matemática e são organizadas em torno de *insights* críticos elaborados pelo matemático e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925). Em nossa pesquisa, retomamos suas ideias teóricas para compreender melhor pelo menos duas questões que consideramos críticas e que estão envolvidas na aprendizagem da Matemática. Primeiro,

[1] O conhecimento matemático, seguindo Radford (2013), é a instanciação ou atualização do conhecimento mediado pelo aprendizado. O conhecimento não é estático, mas "um conjunto de processos incorporados constituídos historicamente e culturalmente de reflexão e ação" (RADFORD, 2013, p. 10, traduzido pelos autores).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

compartilhamos com Frege (1892a) o entendimento de que um conceito matemático não é diretamente acessível por meio do próprio conceito, mas sim por meio de objetos que o representam. Segundo, objetos matemáticos (diferentemente dos objetos das ciências naturais) não podem ser apreendidos pelos sentidos humanos (não podemos, por exemplo, "ver" o objeto); eles não têm existência independente de representações. Eles só podem ser apreendidos por meio de algum "modo de apresentação" (FREGE, 1892b). Isso significa que objetos matemáticos nos são apresentados de determinados modos, como signos ou outros meios semióticos, como gestos, figuras ou expressões linguísticas (RADFORD, 2002)[2].

O modo de apresentação de um objeto é o que Frege (1892b) chamou de *sentido*$_F$ ("Sinn") de uma representação, que deve ser distinguido da *referência*$_F$ ("Bedeutung") de uma representação (o subscrito F indica que esses termos se referem a concepções em FREGE, 1892b). A referência$_F$ de uma representação é o objeto a que ela se refere; enquanto um sentido$_F$ é a maneira pela qual o objeto é transmitido à mente, ou seja, é um *pensamento*$_F$ ("Gedanke") expresso pela representação (FREGE, 1892b).

O sentido$_F$ de uma representação revela seu significado epistemológico; é a maneira pela qual se pode conhecer o objeto a que se refere. As expressões "2 + 2" e "2 · 2" têm a mesma referência$_F$ (ou seja, o número 4), mas têm sentidos$_F$ diferentes; ou seja, são modos diferentes de conhecer o mesmo número, a saber, como a soma ou o produto de dois números. Da mesma forma, as descrições "a estrela da manhã" e "a estrela da tarde" referem-se ao mesmo objeto, ou seja, o planeta Vênus, mas expressam maneiras diferentes de conhecer o planeta Vênus e, portanto, correspondem a sentidos$_F$ diferentes.

Usando a distinção sentido$_F$ e referência$_F$, Frege (1892b) pôde levar em conta diferenças em valores epistemológicos ("Erkenntniswert") entre declarações de identificação da forma "$a = a$" e as da forma "$a = b$". Como o sentido$_F$ de "a" difere do sentido$_F$ de "b", Frege (1892b) teve uma explicação de por que a expressão "$a = b$" é informativa, em contraste com a expressão "$a = a$". Da mesma forma, a afirmação "estrela da manhã = estrela da tarde" tem um valor epistemológico diferente do da afirmação "estrela da manhã = estrela da manhã". O primeiro é conhecido a priori, enquanto o segundo é conhecido a posteriori: sendo uma descoberta astronômica. O mesmo argumento vale para expressões como "4 = 4" e "2 + 2 = 2 · 2". A afirmação "2 + 2 = 2 · 2" é informativa, em contraste com a afirmação "4 = 4". As duas afirmações "2 + 2" e "2 · 2" expressam pensamentos$_F$ diferentes, mas têm a mesma referência$_F$,

[2] De fato, a pesquisa atual reconhece que o conhecimento matemático diz respeito mais a representações de objetos matemáticos do que aos objetos em si (por exemplo, D'AMORE, 2006; DUVAL, 1998a, 1998b; FONT; GODINO; GALLARDO, 2013; OTTE, 2006; RADFORD, 2002).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

o número natural 4. A conclusão a partir desses exemplos é que os sentidos$_F$ geralmente revelam valores epistemológicos diferentes. Isso implica uma das afirmações decisivas de Gottlob Frege, de que o sentido$_F$ de uma representação, ou o pensamento$_F$ expresso por ela, tem importância epistemológica como modo pelo qual a referência$_F$ é apresentada.

Os sentidos$_F$ e os pensamentos$_F$, no entanto, não precisam de um portador (isto é, um indivíduo para incorporá-lo) e, portanto, devem ser distinguidos de uma ideia$_F$ (“Vorstellung”). Uma ideia$_F$ tem características que um pensamento$_F$ não tem: é incorporada por indivíduos e é componente constituinte da consciência de um indivíduo. Como tal, os pensamentos$_F$ são independentes do pensamento de um indivíduo particular e, portanto, o ato de pensar (individual) deve ser diferenciado dos pensamentos$_F$ que um indivíduo pode apreender (FREGE, 1918/1919).

Sugerimos que as ideias$_F$ podem interagir e constituir estruturas de conhecimento mais compactas ou comprimidas, denominadas concepções. Por exemplo, podemos interpretar “$2 + 2$ é igual a $2 \cdot 2$” como “adicionar duas vezes um número é o mesmo que multiplicar por dois”, enquanto é possível também interpretar “$2 \cdot 2$ é igual a $2 + 2$” como “multiplicação é adição repetida”. Alternativamente, concentrando-se na soma e no produto, em vez da adição ou multiplicação, a soma “$2 + 2$” é igual ao produto “$2 \cdot 2$”.

Uma síntese das relações entre as noções de Frege de referência$_F$, sentido$_F$ e idea$_F$, como usamos aqui, é apresentada na Figura 1.

Porém, ao conhecer um objeto, os indivíduos frequentemente confundem o sentido$_F$ de uma representação com a referência$_F$ dessa representação. Duval (2006) problematizou a confusão em potencial entre um sentido$_F$ de uma representação e a referência$_F$ dessa representação no contexto de conhecimento e aprendizagem de Matemática. Como se tem acesso a objetos matemáticos apenas usando sinais e representações, a pergunta é: “como eles [indivíduos] podem distinguir o objeto representado da representação semiótica usada se não conseguem obter acesso ao objeto matemático além da representação semiótica?” (DUVAL, 2006, p. 107, traduzido pelos autores).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

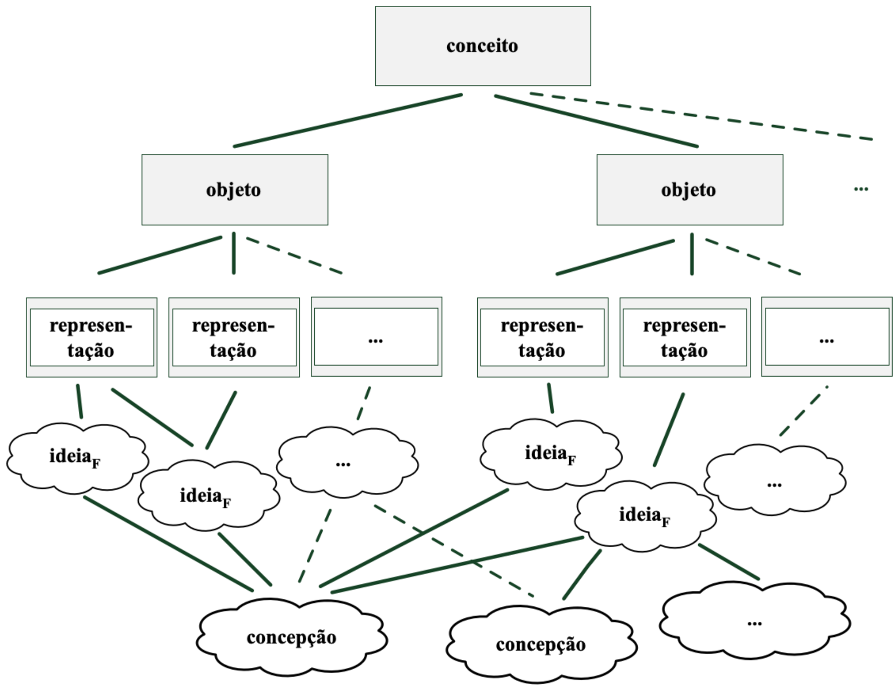

Figura 1 – Sobre *referência$_F$*, *sentido$_F$* e *ideia$_F$*
Fonte: SCHEINER (2016, p. 179)

Ao reconhecer que o sentido$_F$ de uma representação depende particularmente do registro de representação, Duval (2006) considerou a coordenação entre diferentes registros de representação como o fator decisivo para a aprendizagem e para promover a "dissociação entre o conteúdo da representação e o objeto representado" (DUVAL, 2006, p. 126). Ou seja, ele considerou a competência de mudar de um sistema de representação para outro como crucial para dissociar um sentido de uma representação do objeto representado. Duval (2006, p. 125) explicou: "É apenas investigando variações de representação no registro de origem e variações de representação em um registro de destino, para que os alunos possam [...] dissociar o objeto representado do conteúdo dessas representações". Nessa perspectiva, não apenas se distingue entre um objeto matemático e sua representação, mas também se dissocia o sentido$_F$ de uma representação do objeto que está sendo representado – por meio da coordenação entre diferentes sistemas de representação.

Em contraste com Duval (2006), estamos propondo que não é tanto uma questão de como alguém pode dissociar o sentido$_F$ do objeto representado, mas sim uma questão de como o sentido$_F$ atualiza e pode ser apreendido em um contexto imediato.

3 Sobre contextualizar e sua função epistemológica

Como em Frege (1892b), reconhecemos que o *sentido$_F$* de uma representação pode ser

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

entendido de diferentes maneiras. Considere, por exemplo, o objeto 3/4. Existem muitas maneiras diferentes de representá-lo até mesmo dentro de um mesmo sistema de registro de representação (por exemplo, como nas representações icônicas, como ilustrado na Figura 2a e na Figura 2b).

Figura 2a – Parte de um todo
Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 2b – Parte de vários todos
Fonte: Elaborada pelos autores

As representações podem expressar pensamentos$_F$ diferentes sobre os diferentes contextos em que são usados. A Figura 2a, por exemplo, expressa o pensamento$_F$ “parte de um todo”, que pode ser apreendido pela ideia$_F$ de dividir um todo em quatro partes iguais e direcionar sua atenção para três dessas quatro partes. A Figura 2b, por outro lado, expressa o pensamento$_F$ “parte de vários todos”, que pode ser apreendido pela ideia$_F$ de pegar três inteiros, dividir cada um em quatro partes iguais e direcionar sua atenção para uma parte em cada todo.

Um segundo exemplo é o desenvolvimento do binômio $(a + b)^2$ com a operação ou regra computacional $a^2 + 2ab + b^2$. Quando contextualizado na geometria euclidiana plana, $(a + b)^2$ pode expressar o pensamento$_F$ “área de um quadrado” de lados $(a + b)$; ou ainda de soma da área de dois quadrados, de lados a e b, respectivamente, com as áreas de dois retângulos, com lados a e b. Dito de outro modo, expressões diferentes expressam pensamentos diferentes, relacionados aos contextos diversos em que elas são utilizadas.

Vale observar que a noção de contexto não se reduz à de sistemas de representação utilizados (por exemplo, gráfico ou algébrico). O caso das sequências convergentes e de limites de sequências torna tal fato ainda mais evidente. Se representamos as sequências reais na reta numérica, o processo de aproximação de seus termos de uma posição na reta é uma ideia que remete o pensamento$_F$ “aproximação” ao objeto limite da sequência. Se representamos as sequências reais em um sistema de coordenadas cartesianos, uma ideia$_F$ a partir da configuração assintótica, no caso da existência de limite, pode ser a distância entre termos da sequência e a posição do limite está diminuindo, o que poderá associar o pensamento$_F$ “ponto de acumulação” ao objeto limite da sequência.

Entre os dois contextos há uma mudança na direção de referenciais. No primeiro contexto, a direção referencial é dos termos da sequência para o limite – o termo está se aproximando do limite. No segundo, a direção é do limite para os termos da sequência – a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

distância entre os termos e o limite está diminuindo. A atribuição de tais significados particulariza sentidos, em cada caso. Por sua vez, a representação de uma sequência numérica convergente em um sistema de coordenadas com eixos paralelos particulariza o sentido de covariação e possibilita ressaltar o valor N nos naturais a partir do qual os termos da sequência ficam a menos de uma distância pré-fixada a partir de seu limite L.

Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001, p. 63) denominaram “sentido contextualizado de uma expressão” a “um sentido que depende do domínio do conhecimento em que vive”, como no caso que estamos discutindo. Essas ideias são usadas como um modo de recuperar uma das ideias decisivas de Gottlob Frege: o que emerge como sentido$_F$ é por si mesmo dependente do contexto em que um objeto é atualizado. Ou seja, o contexto é constitutivo do sentido$_F$.

Utilizamos – e projetamos – a noção de “contextualização” de van Oers (1998) para uma abordagem de contexto dinâmica, que permita a “particularização de significado” (OERS, 1998, p. 475), ou mais precisamente, a particularização de um sentido$_F$ que se torna efetivo no contexto em que o objeto é usado. Em van Oers (1998), a noção de contextualização indica “um processo de adicionar novo significado a uma dada situação, a fim de caracterizar essa situação em termos do que poderia (ou deveria) ser feito” (OERS, 1998, p. 482). Ou seja, contextualizar é entendido como uma atividade interpretativa e o contexto é visto como uma construção pessoal de como uma situação é interpretada e experimentada.

Por exemplo, pode-se interpretar frações em uma situação particular como “dividir um todo em partes iguais”, o que orienta a apreensão do pensamento$_F$ de “parte de um todo”. Como tal, o pensar está acontecendo a partir de uma certa perspectiva, tal como ver frações como relações parte-todo, reconhecendo a equivalência das representações na Figura 2a e na Figura 2b.

Contextualizar, nessa perspectiva, é intencional: direciona o pensamento do indivíduo para a apreensão de pensamentos$_F$ específicos. A apreensão de diferentes pensamentos$_F$ é epistemologicamente significativa para se conhecer o objeto a que se está referindo. Ao contextualizar o mesmo objeto em diferentes situações, pensamentos$_F$ diferentes podem ser expressos, promovendo valores epistemológicos diferentes para conhecer o objeto que está sendo representado.

4 Sobre complementarizar e sua função conceitual

Frege (1892b) argumenta que um sentido$_F$ particular “ilumina a referência$_F$ […] de um modo muito unilateral. Um conhecimento completo da referência$_F$ exigiria que pudéssemos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

dizer imediatamente se um sentido$_F$, qualquer que seja, pertence à referência$_F$. Nós nunca alcançamos este conhecimento” (FREGE, 1892b, p. 27). Isso quer dizer que, ao entender o sentido$_F$ de apenas uma representação de um objeto, normalmente não estamos em posição de saber o que é o objeto (DUVAL, 2006).

Frege (1892b) elabora que os sentidos$_F$ podem diferir, apesar de compartilharem a mesma referência$_F$, e é essa diferença de sentidos$_F$ que explica o valor epistemológico de diferentes representações. Com esse entendimento, parece ser decisivo não apenas representar um objeto de uma maneira específica, mas também recontextualizar o objeto de várias maneiras que particularizam diferentes sentidos$_F$. A questão, então, torna-se qual é a melhor maneira de utilizar os diferentes sentidos$_F$, muitas vezes até aparentemente conflitantes, provenientes de diferentes representações do mesmo objeto.

Compartilhamos com Frege (1892b) sua afirmação de que é a diversidade de sentidos$_F$ que tem significado epistemológico e estamos propondo que essa diversidade de sentidos$_F$ pode funcionar de uma maneira complementar. Afirmamos que diversos sentidos$_F$ podem ser coordenados para constituir uma unidade conceitual, um processo que Scheiner (2016) chamou de “complementarizar”. Complementarizar significa reunir várias representações – que têm sentidos diferentes, mas se referem ao mesmo objeto – de maneira complementar.[3] Tal posição difere substancialmente da visão empirista tradicional da aprendizagem da Matemática, na qual a unidade conceitual se apoia em semelhanças ou na uniformidade de elementos. Também difere de uma visão reducionista da aprendizagem da Matemática que considera a aprendizagem matemática como acumular vários sentidos$_F$ até que um indivíduo adquira todos os que são potencialmente possíveis. Complementar, ao contrário, significa coordenar diferentes sentidos$_F$ para criar uma unidade conceitual que exceda a capacidade conceitual dos sentidos individuais em si.

[3] Essa perspectiva é consoante com elaborações de Michael Otte sobre a complementaridade em matemática. Por exemplo, Otte e Barros (2017, p. 5) argumentaram: “A matemática é essencialmente uma ciência do idêntico e do diferente, ou sobre igualdade e diferença”. Os mesmos autores especificaram que “adotando um ponto de vista relacional, ou seja, adotando uma ‘visão de mundo’ que forneça um mesmo status ontológico a objetos e relações entre objetos […] compensa o que foi chamado de transição do pensamento sobre objetos para um pensamento relacional complementar” (OTTE; BARROS, 2017, p. 7). Em outras publicações, Otte (2011) discutiu a natureza dual das teorias como meios e objetos que funcionam de maneira complementar: “Meios e objetos são totalmente diferenciáveis por seus respectivos momentos na atividade cognitiva individual, mas desempenham um papel completamente simétrico no desenvolvimento da cognição. Essa complementaridade (diferença e unidade) de objetos e meios explica o surgimento e o dinamismo da Matemática pura no século XIX” (OTTE, 2011, p. 326).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

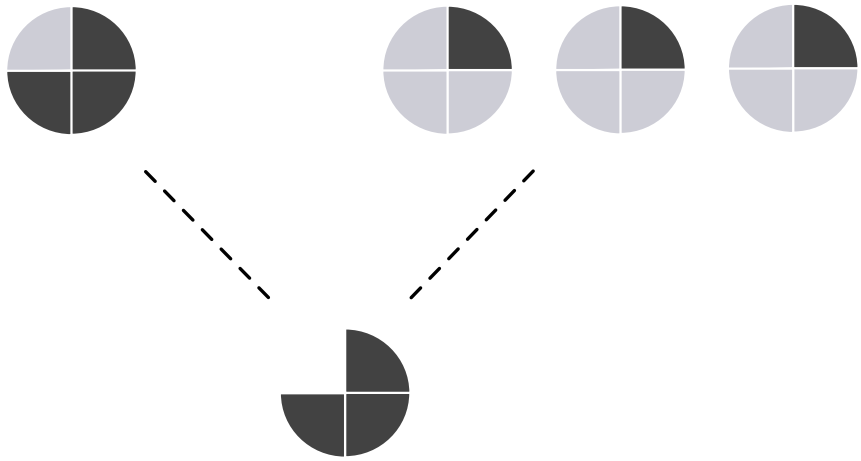

Figura 3 – A unidade conceitual de “parte de um todo” e “parte de vários inteiros”
Fonte: Elaborada pelos autores

Considere, por exemplo, a Figura 3, em que o objeto 3/4 é expresso de duas maneiras diferentes que podem ser coordenadas em um modo unificado de apresentação. Os dois modos diferentes por meio dos quais o objeto 3/4 é trazido à mente têm semelhanças e diferenças. Ambos correspondem a representações icônicas referentes ao mesmo objeto matemático, mas diferem por exprimir dois pensamentos diferentes – a saber, “parte de um todo” e “parte de vários inteiros”, respectivamente. Na unidade conceitual, possibilidades para novos significados são abertas. Por exemplo, o todo dividido em quatro partes iguais é preenchido com quatro dessas partes, abrindo espaço para comparar duas quantidades ou grandezas.

De modo análogo, as expressões $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ exprimem dois pensamentos$_F$ distintos, que são o de desenvolvimento (binomial) e o de fatoração. Entender o binômio $(a + b)^2$ como uma expressão equivalente a $a^2 + 2ab + b^2$, ou seja, como uma unidade conceitual, e não como uma mera manipulação formal de símbolos, inclui a coordenação simultânea dos dois sentidos correspondentes a desenvolvimento e fatoração. Os contextos da geometria euclidiana confluem para tal unidade: a área do quadrado de lados $a + b$ pode ser decomposta (e pode ser recuperada como em um quebra-cabeças) como a soma de áreas menores de quadrados e retângulos – havendo, portanto, uma equivalência entre áreas.

O estudo de sequências convergentes e limite de sequências evidencia modos diversos de abordagem – em especial, os modos intuitivo e algébrico, como utilizamos no cálculo, e o formal, na análise real. Tais modos introduzem novos contextos e releituras dos demais, e uma (re)conceituação permanente dos objetos. Nesse sentido, entendemos a aprendizagem da Matemática em um fluir permanente, sem exaurir a conceituação de um objeto matemático como um todo, por completo, em algum dado momento.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

São as semelhanças e diferenças – a complementaridade – entre contextos e representações que explicam a emergência da unidade conceitual apresentada na Figura 3. O modo unificado de apresentação não é tanto o de uma representação particular especificada e que inclui todos os aspectos, mas é próximo ao de uma representação que inclui variações e interpretações possíveis, em diversos contextos. É na confluência entre contextos distintos, e não em sua eliminação ou superação, que o espaço de possibilidades conceituais é aberto.

5 Sobre complexificar e sua função cognitiva

Ao coordenar os diversos sentidos$_F$ expressos por diferentes representações, podemos também colocar em diálogo as diferentes ideias$_F$ para apreender os pensamentos expressos por essas representações. Esse diálogo entre ideias$_F$ pode promover o surgimento de novas ideias$_F$. Por exemplo, em relação ao objeto 3/4, a ideia$_F$ de “dividir um todo em quatro partes iguais e direcionar a atenção para três dessas quatro partes” para apreender o pensamento$_F$ de “parte de um todo” e a ideia$_F$ de “tomar três inteiros, cada um deles dividido em quatro partes iguais, e direcionar a atenção para uma parte de cada todo” para apreender o pensamento de “parte de vários inteiros” pode ser colocado em diálogo de maneira a promover o surgimento de uma nova ideia$_F$: destacar três elementos dentre quatro. Essa pode envolver a ideia$_F$ de que, para uma determinada sequência de elementos (por exemplo, bolas), três elementos são marcados e um é excluído, respectivamente (veja a Figura 4). Ou seja, cada quarto elemento não está no foco da atenção do indivíduo.

Figura 4 – Sequência de três bolas coloridas e uma bola não colorida
Fonte: Elaborada pelos autores

Na Figura 4, o objeto 3/4 é representado em um conjunto discreto, a sequência de bolas, a partir da ação de contar. Vale observar em primeiro lugar que a representação expressa o objeto como uma “parte de um conjunto” ou “parte de um grupo”, que, por vezes, não é automaticamente identificada com o pensamento$_F$ “parte de um todo” descrito anteriormente. “Parte de um conjunto” é a comparação ou relação entre a quantidade de um conjunto de objetos – três bolas coloridas – e o conjunto maior de quatro bolas. O pensamento$_F$ “parte de um conjunto” pode ser também apreendido pela ideia$_F$ de que “três em cada quatro (bolas) são coloridas”. O pensamento$_F$, nesse caso, é diferente do expresso como “parte de um todo”; mas a ideia$_F$ de “três em quatro” está em diálogo com a anterior. Em cada exemplo, sentido$_F$ e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

pensamento$_F$ correspondem a diferentes epistemologias do mesmo objeto. De fato, o pensamento de “parte de um conjunto” envolve a ideia$_F$ de colocar objetos discretos em categorias (bolas coloridas ou não coloridas, neste caso) e relacionar essas categorias por meio do processo de contagem; enquanto o pensamento$_F$ “parte de um todo” expressa a ideia$_F$ de dividir um todo em partes iguais e direcionar a mente a algumas dessas partes – ou, em outras palavras, dividir quantidades contínuas em partes iguais e considerar algumas dessas partes por meio de ações de medir.

Dado o escopo deste artigo, somos breves na discussão dos dois outros exemplos estudados. Ao envolver variáveis, no estudo de polinômios, por exemplo, a equivalência entre as expressões $(a + b)^2$ e $(a^2 + 2ab + b^2)$ expressa um novo sentido$_F$, que é o de identidade, por meio do desenvolvimento $(x + k)^2 = (x^2 + 2kx + k^2)$. Enquanto o pensamento$_F$ “equivalência” para o primeiro caso expressa a ideia$_F$, por exemplo, de “regra computacional”, no segundo caso o pensamento$_F$ “identidade” expressa a ideia$_F$, por exemplo, de igualdade entre duas funções. No contexto da álgebra, as estruturas algébricas possibilitam novos sentidos, pensamentos e ideias.

No caso das sequências e limites de sequências, abordagens intuitivas, teóricas e formais e os múltiplos contextos possíveis podem promover o diálogo entre ideias$_F$ expressas, respectivamente, por pensamentos$_F$ distintos como os de aproximação, acumulação, ou de atender condição aritmética.

A coordenação de diversos sentidos$_F$, expressa por diferentes representações e o diálogo de diferentes ideias$_F$ para apreender pensamentos são, afirmamos, centrais para a aprendizagem da Matemática. Entendemos esse diálogo de ideias$_F$ – que pode levar ao surgimento de novas ideias$_F$ – como parte do processo de complexificação do sistema de conhecimento. Por exemplo, colocar em diálogo as duas ideias$_F$ – ou seja, dividir um todo em partes iguais e colocar objetos discretos em categorias e relacioná-las – permite contabilizar contextos diferentes, como os de quantidades discretas e contínuas. Tal diálogo de ideias$_F$ diferentes pode resultar em compressão de compatibilidades e aumento da sensibilidade em relação às diferenças contextuais existentes.

Sugerimos que esse diálogo das ideias$_F$ é da natureza do que Koestler (1964) descreveu como “bissociação” e Fauconnier e Turner (2002) elaboraram como “harmonização conceitual”. Para Koestler (1964), qualquer ato criativo é uma bissociação de dois (ou mais) referenciais não relacionados (e aparentemente incompatíveis) (chamados matrizes) em uma nova matriz de significado por meio de um processo que envolve abstração, analogias, categorização, comparação e metáforas. Mais recentemente, Fauconnier e Turner (2002)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

elaboraram e formalizaram a ideia de bissociação de Koestler ao que chamaram de harmonização conceitual[4]. A essência da harmonização conceitual é construir uma correspondência parcial, denominada mapeamento entre espaços, entre quadros de domínios estabelecidos (conhecidos como entradas), para projetar seletivamente essas entradas em um novo quadro híbrido (chamado de harmonização), composto de uma estrutura de cada uma de suas entradas, bem como de uma estrutura única (ou seja, uma estrutura emergente). Isso reforça a afirmação de Tall (2013, p. 28, traduzido pelos autores) de que "todo desenvolvimento do pensamento matemático é apresentado como uma combinação de compressão e harmonização de estruturas de conhecimento para produzir conceitos cristalinos que podem levar a novas formas imaginativas de pensar matematicamente em novos contextos".

6 Discussão

Há um reconhecimento de que é somente através de um modo de apresentação que um indivíduo pode conhecer um objeto matemático. No entanto, um modo de apresentação ilumina o objeto de uma maneira unilateral (FREGE, 1892b) e modos diversos de apresentação expressam maneiras diferentes de conhecer um mesmo objeto, tendo, portanto, funções e valores epistemológicos distintos. Partindo de tais pressupostos, propusemos a contextualização, segundo perspectiva de van Oers (1998), como decisiva para particularizar um sentido$_F$ e expressar um pensamento$_F$ referentes a um objeto que está sendo considerado.

Mantivemos o diálogo com Gottlob Frege, uma vez que ele destaca que o contexto em que colocamos um objeto em prática é constitutivo de seu sentido$_F$. Contextualizar inclui assumir uma perspectiva, particular, que direciona nossa atenção para sentidos$_F$ específicos, sendo, portanto, um processo constituído por ações intencionais. Ao contextualizar e recontextualizar o objeto, não apenas diferentes sentidos$_F$ e pensamentos$_F$ podem ser particularizados, como se pode também conhecer o objeto de modos diferentes e complementares. Complementarizar, como argumentamos aqui, sinaliza um processo envolvendo sentidos diversos para constituir uma unidade conceitual que pode exceder por si só o alcance conceitual individual de cada um dos sentidos$_F$.

A aprendizagem de conceitos matemáticos revela-se, assim, em um encontro de várias vertentes epistêmicas, correspondentes à diversidade de contextos trazidos durante processo de contextualização, por meio do processo de complementarização. Sendo essa uma alternativa ao

[4] Harmonização conceitual (ou mistura conceitual) é nossa proposta para tradução da expressão *conceptual blending*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

entendimento da aprendizagem de conceitos matemáticos como resultado de descontextualizações. Além disso, ao dialogar com ideias$_F$ diferentes para apreender pensamentos$_F$ particulares, novas ideias$_F$ podem surgir com qualidades e *insights* que não estão evidentes nas ideias$_F$ originais das quais elas emergiram. Isso pode levar a um sistema de conhecimento cada vez mais complexo, com estruturas de conhecimento compactas e combinadas, promovendo novas formas de pensar sobre o conceito em questão.

Nessa perspectiva, a aprendizagem da Matemática permanece em estado de mudança, uma vez que transforma e é transformada por meio dos processos de contextualização, complementarização e complexificação. Nesse sentido, a aprendizagem da Matemática flui continuamente e não pode ser preestabelecida, porque evolui no diálogo entre o contextualizar, o complementarizar e o complexificar. Ou seja, a aprendizagem da Matemática não segue uma trajetória de desenvolvimento previsível, embora o desenvolvimento da aprendizagem da Matemática seja direcional: parece avançar em direção a uma diversidade crescente de sentidos$_F$, uma descentralização de pensamentos$_F$ e uma interação crescente de ideias$_F$.

O que se torna evidente a partir dos exemplos estudados é que, para conhecer um objeto, o objeto deve ser expresso de modo a propulsionar sentidos$_F$ diversos. Mais ainda, conhecer um objeto não é uma questão de se concentrar em um único pensamento$_F$ em torno do qual os demais pensamentos devam ser organizados (como o pensamento$_F$ de "parte de um todo", ao se estudar frações). É a variedade de pensamentos$_F$, apreendidos a partir de uma variedade de ideias$_F$ para a produção de significado do objeto em consideração, que fornece um recurso para ativar as ideias$_F$ produtivas, em contexto imediato da criação de sentido$_F$. Diversidade de sentidos$_F$ e descentralização de pensamentos$_F$, no entanto, não são apenas essenciais para a produção de significado no contexto imediato, mas também o são para a criação de novas ideias$_F$. Enquanto analogias geralmente se concentram nas compatibilidades entre ideias$_F$ simultaneamente conectadas, a harmonização é igualmente impulsionada por incompatibilidades (ver FAUCONNIER; TURNER, 2002).

A criação de novas ideias$_F$, no entanto, só ocorre se houver um certo nível de interação entre as ideias$_F$ existentes. Ou seja, somente se as ideias$_F$ puderem compensar as restrições e limitações uma da outra, é possível ampliar o espaço de possibilidades ao pensar em um conceito matemático. Desse ponto de vista, novas ideias$_F$ podem atribuir um significado novo a objetos do pensamento. Isso dá substância à afirmação de que a aprendizagem da Matemática se ocupa tanto em produzir significado para um conceito quanto em compreendê-lo (SCHEINER, 2017).

Considere, como um último exemplo, a sequência mostrada na Figura 5, na qual seis

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

bolas são coloridas e duas não são coloridas. Podemos reorganizar a sequência mostrada na Figura 4 de maneira a criar a sequência mostrada na Figura 5 e vice-versa. Na Figura 4, três das quatro bolas na sequência são coloridas; enquanto na Figura 5, seis das oito bolas na sequência são coloridas. Em outras palavras, a sequência na Figura 4 refere-se ao objeto 3/4 e a sequência na Figura 5 refere-se ao objeto 6/8. A equivalência entre os objetos 3/4e 6/8 pode ser compreendida (e sugerida) através deste rearranjo das bolas em qualquer uma das respectivas sequências.

Figura 5 – Sequência de seis bolas coloridas e duas bolas não coloridas
Fonte: Elaborada pelos autores

Podemos reconhecer a equivalência de 3/4 e 6/8 entendendo a *ideia*$_F$ de “pegar seis bolas e deixar duas de fora” como a mesma *ideia*$_F$ de “pegar três bolas e deixar de fora uma” (porque o efeito de uma ou outra ação é o mesmo). Desse modo, a relação “é o mesmo que” entre as duas ideias expande o domínio das relações entre duas concepções distintas, relacionadas 3/4 e 6/8, respectivamente. Sugerimos que a equivalência, que é uma relação importante entre diferentes frações levando à definição de operações com frações e à estrutura algébrica de números racionais, é apreendida por compressão de ideias$_F$ como concepções. Em um movimento de atribuição de significado, os pensamentos$_F$ expressos por sentidos$_F$, são apreendidos por ideias$_F$ em permanente diálogo.

No exemplo em estudo, a concepção de “ser o mesmo que”, que tentamos descrever, é útil para apreender o pensamento$_F$ relacionado à equivalência. Por exemplo, considere a divisão de um todo em oito partes iguais, das quais seis são marcadas, conforme representado na Figura 6b. Esse é um refinamento adicional da divisão de um todo em quatro partes iguais, das quais três são marcadas, conforme representado na Figura 6a.

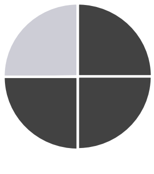

Figura 6a – Representando 3/4
Fonte: Elaborada pelos autores

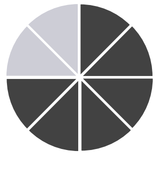

Figura 6b – Representando 6/8
Fonte: Elaborada pelos autores

O pensamento$_F$ esperado é o da equivalência entre as duas frações. Sugerimos que a equivalência pode ser apreendida pela ideia$_F$ de “ser o mesmo que” (ou “ter o mesmo efeito de”) relacionando dois pensamentos$_F$, como expresso na unidade conceitual na Figura 3.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

7 Conclusões

A proposta neste artigo é entender melhor o papel de contextualizar, complementarizar e complexificar como processos críticos na aprendizagem da Matemática, quando os indivíduos atribuem significado aos objetos de seu pensamento. Tivemos como objetivo estender as perspectivas existentes sobre tais processos, destacando suas funções epistemológicas, conceituais e cognitivas. É amplamente reconhecido que o contexto é necessário para a atribuição de significado aos artefatos humanos. Usando a noção de contextualização, van Oers (1998) capitalizou essa ideia, enfatizando um processo de construção de contexto para atribuir significado a objetos do pensamento de um indivíduo. Seguindo essa linha de pensamento, sublinhamos a importância de contextualizar um objeto matemático de maneiras diferentes para particularizar sentidos$_F$ diferentes, uma vez que a diferença de sentidos$_F$ explica o significado epistemológico de diferentes representações. Complementarizar, então, afirma-se como a coerência contínua de sentidos$_F$ diversos, em uma unidade cujas capacidades conceituais excedem por si mesmas as dos sentidos$_F$ individuais. Complexificar, por outro lado, conduz ao desenvolvimento de sistemas complexos de conhecimento, com estrutura emergente da harmonização e compressão de ideias$_F$ existentes.

A ampliação e o refinamento dos processos contextualizar, complementar e complexificar são úteis para reconhecer a dinâmica envolvida quando os indivíduos atribuem significado aos objetos de seu pensamento.

Referências

ARZARELLO, F.; BAZZINI, L.; CHIAPPINI, G. A model for analysing algebraic processes of thinking. *In*: SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. (ed.). **Perspectives on school algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2001. p. 61-81.

ASSUDE, T.; BOERO, P.; HERBST, P.; LERMAN, S.; RADFORD, L. The notions and roles of theory in mathematics education research. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Monterrey. **Proceedings […]** Monterrey: ICMI, 2008. p. 338-356.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking of theories: an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. *In*: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (ed.). **Theories of mathematics education**: Seeking new frontiers. New York: Springer, 2010. p. 183-506.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (ed.) **Networking of theories as a research practice in mathematics education**. New York: Springer, 2014.

CAMPBELL, J. I. (ed.). **Handbook of mathematical cognition**. New York: Psychology Press, 2005.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

COBB, P. Putting philosophy to work. *In*: LESTER, F. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007. p. 3-38.

D'AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Del. Gustavo A. Madero, v. 9, n. 1, p. 177-196, 2006.

diSESSA, A.; LEVIN, M.; BROWN, N. (ed.). **Knowledge and interaction**: A synthetic agenda for the learning sciences. New York: Routledge, 2016.

DUVAL, R. Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 6, n. 1, p. 139- 163, 1998a.

DUVAL, R. Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 6, n. 1, p. 165-196, 1998b.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

FAUCONNIER, G.; TURNER, M. **The way we think**: Conceptual blending and the mind's hidden complexities. New York: Basic Books, 2002.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97-124, 2013.

FREGE, G. Über Begriff und Gegenstand. **Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie**, Norderstedt: Hansebooks GmbH, v. 16, p. 192-205, 1892a.

FREGE, G. Über Sinn und Bedeutung. **Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik**, Leipzig v. 100, p. 25-50, 1892b.

FREGE, G. Der Gedanke: Eine logische Untersuchung. **Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus,** Berlin: Junker&Dunnhaupt, v. 2, p. 58-77, 1918/1919.

KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. (ed.). **Meaning in mathematics education**. New York: Springer, 2005.

KOESTLER, A. **The act of creation**. London: Hutchinson, 1964.

LERMAN, S. Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 46, n. 1-3, p. 87-113, 2001.

LINS, R. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. *In*: BICUDO, M. A. V. (ed.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 11-38, 2006.

OTTE, M. F. Evolution, learning, and semiotics from a Peircean point of view. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 77, n. 2-3, p. 313-329, 2011.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. About complementarity. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 10, n. 1, p. 2-7, 2017.

PIAGET, J. **Studies in reflecting abstraction**: Recherches sur l' abstraction réfléchissante. Tradução de R. Campbell. Philadelphia: Psychology Press, 2001. (Trabalho original publicado em 1977).

PINTO, M. M. F. **Students' understanding of real analysis**. PhD thesis, The Warwick University. Coventry: University of Warwick, 1998.

PINTO, M. M. F. Making sense of students' sense making of mathematics. *In*: GÓMEZ, D. M. (ed.). *In*: PME REGIONAL CONFERENCE: SOUTH AMERICA, 1., Rancágua, Chile. 2018. **Proceedings** […]. Rancagua: PME, 2018. p. 31-45.

PINTO, M. M. F.; SCHEINER, T. Visualização e ensino de análise matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 637-654, 2015.

PINTO, M. M. F.; SCHEINER, T. Making sense of students' sense making through the lens of the structural abstraction framework. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL NETWORK FOR DIDACTIC RESEARCH IN UNIVERITY MATHEMATICS, 1., Montpelier, France. 2016. **Proceedings** […]. Montpellier: INDRUM, 2016. p. 472-483.

RADFORD, L. The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster, v. 22, n. 2, p. 14-23, 2002.

RADFORD, L. Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, Reston, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching, and learning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 77, n. 2-3, p. 149-156, 2011.

SCHEINER, T. New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 91, n. 2, p. 165-183, 2016.

SCHEINER, T. Conception to concept or concept to conception? From being to becoming. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 41., Singapore, 2017. **Proceedings** […]. Singapore: PME. 2017, v. 4. p. 145-152.

SCHEINER, T. If we want to get ahead, we should transcend dualisms and foster paradigm pluralism. *In*: KAISER, G.; PRESMEG, N. (ed.). **Compendium for early career researchers in mathematics education**. Cham: Springer, 2019. p. 511-532.

SCHEINER, T. Dealing with opposing theoretical perspectives: Knowledge in structures or knowledge in pieces? **Educational Studies of Mathematics**, Dordrecht, v. 104, n. 1, p. 127-145, 2020.

SCHEINER, T.; PINTO, M. M. F. Images of abstraction in mathematics education: contradictions, controversies, and convergences. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 40., Szeged, Hungary, 2016. **Proceedings** […]. Szeged: PME, 2016, v. 4. p. 155-162.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a22

SCHEINER, T.; PINTO, M. M. F. Theoretical advances in mathematical cognition. *In*: PME REGIONAL CONFERENCE: SOUTH AMERICA, 1., Rancagua, Chile, 2018. **Proceedings** […]. Rancagua: PME, 2018, p. 97-104.

SCHEINER, T.; PINTO, M. M. F. Emerging perspectives in mathematical cognition: contextualizing, complementizing, and complexifying. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 101, n. 3, p. 357-372, 2019.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In*: GROUWS, D. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 1992. p. 334-370.

SCHUBRING, G. Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning: epistemology, history, and semiotics interacting. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 77, n. 1, p. 79-104, 2011.

SFARD, A. **Thinking as communicating**: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (ed.). **Mathematics education as a research domain**: A search for identity. Dordrecht: Kluwer, 1998.

SKOVSMOSE, O. Interpretações de significado em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 764-780, dez. 2018.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically**: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

VAN OERS, B. From context to contextualizing. **Learning and Instruction**, Amsterdam: Elsevier Science, v. 8, n. 6, p. 473-488, 1998.

VYGOTSKY, L. S. The genesis of higher mental functions. *In*: RIEBER, R. W. (ed.). **The collected works of L. S. Vygotsky**: The history of the development of higher mental functions. New York: Springer, 1997, p. 97-120. v. 4.

Submetido em 21 de Abril de 2020.
Aprovado em 08 de Setembro de 2021.